



**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK

**Aalborg Universitet**

## **Kontinuummekanik**

*III - dynamik*

Rathkjen, Arne

*Publication date:*  
1992

*Document Version*  
Tidlig version også kaldet pre-print

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Rathkjen, A. (1992). *Kontinuummekanik: III - dynamik*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. R : Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet Bind R9226

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

---

**INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK**  
DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING  
AALBORG UNIVERSITETSCENTER • AUC • AALBORG • DANMARK

---

---

**A. RATHKJEN**  
**KONTINUUMMEKANIK**  
**III-DYNAMIK**  
**SEPTEMBER 1992**

**ISSN 0902-7513 R9226**

---

---

**INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK**  
DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING  
AALBORG UNIVERSITETSCENTER • AUC • AALBORG • DANMARK

---

---

**A. RATHKJEN**  
**KONTINUUMMEKANIK**  
**III-DYNAMIK**  
**SEPTEMBER 1992**

**ISSN 0902-7513 R9226**

---

### III DYNAMIK

Dynamikken omhandler de kræfter, som fremkalder og opretholder bevægelser, som beskrives ved hjælp af de størrelser, der er behandlet i kapitel II. Dynamikkens bevægelsesligninger for kontinuerte medier skal her opstilles på grundlag af Newtons bevægelseslove for massepartikler. I disse love indgår begreber som kraft, masse og acceleration. Af de nævnte størrelser er acceleration omtalt i afsnit 8.4. Kapitlet her indledes derfor med en behandling af masse i afsnit 11 fulgt af afsnit 12, som omhandler kræfter og spændinger, mens bevægelsesligningerne og specielle spændingstilstande er emnerne for afsnit 13 og 14. Løsninger til bevægelsesligningerne, specielt ligevægtsligningerne, i form af spændingsfunktioner, tages op i afsnit 15.

Newtons love antages at gælde i inertialsystemer, dvs. systemer som bevæger sig i forhold til hinanden med konstant hastighed, men uden at rotere i forhold til hinanden. Ved system forstås her et punkt og tre retninger; disse retninger skal altså være faste i rummet.

#### 11. MASSE

Til ethvert materielt legeme er der knyttet to skalære størrelser, som betegnes volumen og masse. Til volumenelementet  $dv$  svarer massen  $dm$ , og under forudsætning af kontinuert massefordeling i legemet defineres massetætheden eller densiteten  $\rho$  ved

$$\rho = dm/dv \quad (11.1)$$

Massen  $m$  af et volumen  $v$  af endelig størrelse bestemmes ved

$$m = \int_v \rho(\bar{r}) dv \quad (11.2)$$

hvor skrivemåden  $\rho(\bar{r})$  antyder, at massetætheden er en kontinuert funktion af stedvektoren  $\bar{r}$ .

##### 11.1 Massens bevarelse

De bevægelser, som skal behandles her, forudsættes at foregå ved så små hastigheder, at man kan regne et legemes masse konstant under en bevægelse. Et volumenelement, hvis partikler afgrænses af en lukket flade og som i referencetilstanden, har volumenet  $dV$ , vil under en deformation føres over i et element, som indeholder de samme partikler og har volumen  $dv$ . Idet massetætheden i referencetilstanden betegnes  $\rho_0$ , kan forudsætningen om massens konstans udtrykkes ved

$$dm = \rho_0 dV = \rho dv \quad (11.3)$$

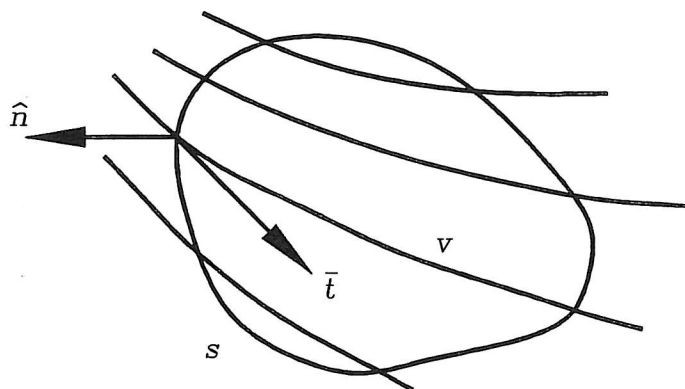
I en materiel deformationsbeskrivelse har man  $dv/dV = J$ , se afsnit 7.1, og massens bevarelse udtrykkes ved

$$\rho_0 = \rho J \quad (11.4)$$

Tilsvarende har man i en rumlig deformationsbeskrivelse  $dV/dv = j$ , se afsnit 7.2, og hermed

$$\rho_0 j = \rho \quad (11.5)$$

Et udtryk for massens konstans i den rumlige strømningbeskrivelse findes ved at betragte et fast volumen  $v$  begrænset af en lukket flade  $s$ , se figur 11.1, som også viser



Figur 11.1

nogle strømmlinier. I et vilkårligt punkt er ændringen af massetætheden  $\partial\rho/\partial\alpha$ , og den masse, der strømmer ind i  $v$  gennem  $s$ , er  $\int_s -\rho\hat{n} \cdot \bar{t} ds$ , hvor minustegnet skyldes, at  $\hat{n}$  er en udadrettet normal. Man har derfor masseforøgelsen

$$\int_v (\partial\rho/\partial\alpha) dv = - \int_s \rho\hat{n} \cdot \bar{t} ds \quad (11.6)$$

som ved hjælp af divergenssætningen kan skrives

$$\int_v (\partial\rho/\partial\alpha + \text{div}(\rho\bar{t})) dv = 0 \quad (11.7)$$

Da (11.7) skal gælde for et vilkårligt område, må integranden være nul dvs.

$$\partial\rho/\partial\alpha + \text{div}(\rho\bar{t}) = 0 \quad (11.8)$$

Med  $\text{div}(\rho \bar{t}) = \bar{t} \cdot \text{grad} \rho + \rho \text{div} \bar{t}$  fås

$$\partial \rho / \partial \alpha + \bar{t} \cdot \text{grad} \rho + \rho \text{div} \bar{t} = 0 \quad (11.9)$$

eller

$$D\rho/D\alpha + \rho \text{div} \bar{t} = 0 \quad (11.10)$$

Udtrykkene (11.8) - (11.10) kaldes ofte *kontinuitetsligningen*.

Ligningen fremkommer også ved at benytte (11.4) og (8.33b)

$$\begin{aligned} D\rho_0/D\alpha = 0 &= D(\rho J)/D\alpha = JD\rho/D\alpha + \rho DJ/D\alpha \\ &= J(D\rho/D\alpha + \rho \text{div} \bar{t}) \end{aligned} \quad (11.11)$$

Med antagelsen om massens konstans kan betingelsen for deformation under volumenkonstans,  $J = 1$ , se afsnit 9.2.1b, skrives

$$\rho = \rho_0 \quad (11.12)$$

mens man for strømninger under volumenkonstans, se afsnit 9.2.2b, foruden (9.71)  $DJ/D\alpha = \text{div} \bar{t} = I_d = 0$ , får

$$D\rho/D\alpha = 0 \quad (11.13)$$

## 11.2 Den materielle afledede

I afsnit 8.2.1 er Reynolds transportsætning (8.31) udledt

$$\frac{D}{D\alpha} \int_v \underline{\underline{m}} dv = \int_v (D\underline{\underline{m}}/D\alpha + \underline{\underline{m}} \text{div} \bar{t}) dv \quad (11.14)$$

hvor  $\underline{\underline{m}}(\bar{r})$  er en tensordensitet knyttet til volumenelementet  $dv$ . Er der i stedet tale om en tensordensitet  $\underline{\underline{\mu}}(\bar{r})$ , som er knyttet til masseelementet  $dm$ , har man  $\underline{\underline{\mu}} dm = \rho \underline{\underline{\mu}} dv$ , og man finder

$$\frac{D}{D\alpha} \int_v \rho \underline{\underline{\mu}} dv = \int_v (D\rho \underline{\underline{\mu}}/D\alpha + \rho \underline{\underline{\mu}} \text{div} \bar{t}) dv \quad (11.15)$$

som ved hjælp af kontinuitetsligningen (11.10) bliver

$$\frac{D}{D\alpha} \int_v \rho \underline{\underline{\mu}} dv = \int_v \rho \frac{D\underline{\underline{\mu}}}{D\alpha} dv \quad (11.16)$$

Med  $\underline{\underline{\mu}} = \bar{v}$ , hastighedsvektoren, og  $\alpha = t$ , tiden, er  $\rho \bar{v}$  bevægelsesmængden og  $D\bar{v}/Dt = \bar{a}$ , accelerationen, og man har

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \bar{v} dv = \int_v \rho \bar{a} dv \quad (11.17)$$

## 12. KRÆFTER OG SPÆNDINGER

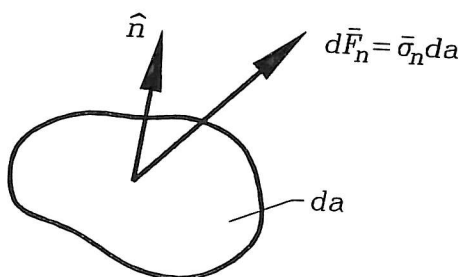
De kræfter, som optræder i kontinuummeknikken, inddeles i massekræfter knyttet til masselementer  $dm = \rho dv$ , og fladekræfter knyttet til fladelementer  $da$ . Fladekræfter pr. arealenhed kaldes spændinger.

### 12.1 Massekræfter

Massekraften pr. masseenhed antages at være en centralt virkende kraftvektor, som betegnes  $\bar{b}$  og den samlede massekraft på et legeme beregnes som  $\int_v \rho \bar{b} dv$ . Et eksempel på en massekraft er tyngdekraften.

### 12.2 Spændinger

Fladekræfter optræder på et legemes begrænsningsflade i form af f.eks. kontaktkræfter, men også i tænkte snitflader i et legemes indre forekommer fladekræfter. Figur 12.1 viser et fladelement med arealet  $d\bar{a} = da\hat{n}$  påvirket af kraften  $d\bar{F}_n$ . Det antages, at der i



Figur 12.1

ethvert punkt af en flade eksisterer en grænseværdi af forholdet  $d\bar{F}_n/da$ . Denne grænseværdi kaldes *spændingsvektoren* og betegnes  $\bar{\sigma}_n$ , når man ønsker at præcisere afhængigheden af normalen  $\hat{n}$ , ellers blot  $\bar{\sigma}$ . Man har altså

$$\bar{\sigma}_n = d\bar{F}_n/da \quad (12.1)$$

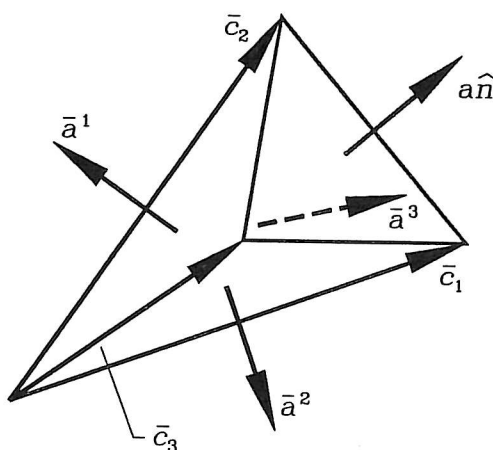
Spændingsvektoren  $\bar{\sigma}_n$  virker på de partikler, som ligger indenfor fladestykket, hvor indenfor er defineret ved den udadgående normal  $\hat{n}$ , som er vist i figur 12.1. Idet loven om aktion og reaktion forudsættes at gælde, vil partiklerne på den anden side af fladestykket, hvilket angives ved den udadgående normal  $-\hat{n}$ , være påvirket af spændingsvektoren  $-\bar{\sigma}_n$ , altså  $\bar{\sigma}_{-n} = -\bar{\sigma}_n$ .

Sædvanligvis karakteriseres et kraftsystem ved en kraftresultant, her  $d\bar{F}$ , og en momentresultant, som kan betegnes  $d\bar{M}$ . Den til  $d\bar{M}$  svarende momentenspændingsvektor

$\bar{\mu} = d\bar{M}/da$  forudsættes her at være nul, dvs. der regnes også med centralt virkende kræfter mellem nabopartikler. Spændingsvektoren  $\bar{\sigma}$  kaldes ofte Cauchy-spændingen.

Gennem et punkt i et legeme kan der lægges uendelig mange snitflader karakteriseret ved hver sin normalvektor, og de til de enkelte snitflader svarende spændingsvektorer vil i almindelighed alle være forskellige. Spændingsvektorerne i et punkt er således funktioner af både stedvektoren til det betragtede punkt, normalen til den betragtede snitflade og evolutionsparameteren  $\alpha$ ,  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{r}, \hat{n}, \alpha)$ . Det skal nu vises, at afhængigheden af normalen kan gøres eksplicit ved indførelse af en spændingstensor  $\bar{\bar{\sigma}}$ , som i et punkt er bestemt ved kendskab til spændingsvektorerne på tre flader gennem punktet.

Et tetraeder har som vist i figur 12.2 de tre sider  $\bar{c}_1$ ,  $\bar{c}_2$  og  $\bar{c}_3$ . Tetraederet har volu-



Figur 12.2

menet  $c/6 = [\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3]/6$  og arealvektorerne  $\bar{a}^k$  er  $\bar{a}^1 = \bar{c}_3 \times \bar{c}_2/2$ ,  $\bar{a}^2 = \bar{c}_1 \times \bar{c}_3/2$  og  $\bar{a}^3 = \bar{c}_2 \times \bar{c}_1/2$ , dvs.  $\bar{a}^k = -c\bar{c}^k/2$ , hvor  $\bar{c}^k = e^{klm}\bar{c}_l \times \bar{c}_m/2c$  jvf. afsnit 3.3. Da arealvektoren for en lukket flade, som vist i afsnit 5.7, er nul, har man til bestemmelse af arealvektoren  $a\hat{n}$  på den fjerde sideflade

$$a\hat{n} + \bar{a}^1 + \bar{a}^2 + \bar{a}^3 = \bar{0} \quad (12.2)$$

Indføres

$$\bar{a}^1 = a^1\hat{n}_1, \bar{a}^2 = a^2\hat{n}_2, \bar{a}^3 = a^3\hat{n}_3 \quad (12.3)$$

har man

$$a\hat{n} = -a^1\hat{n}_1 - a^2\hat{n}_2 - a^3\hat{n}_3 = -a^k\hat{n}_k \quad (12.4)$$

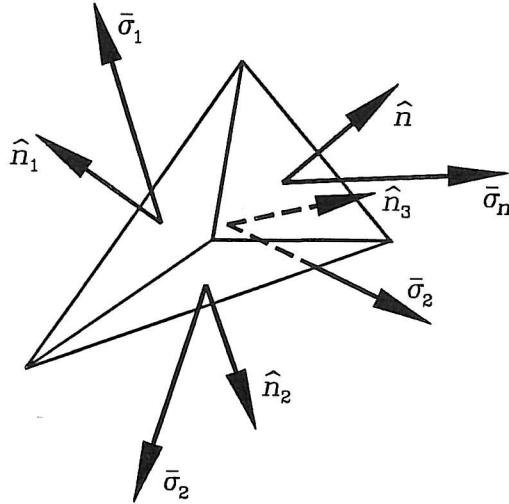
og hermed

$$\hat{n} = -a^k\hat{n}_k/a \quad (12.5)$$



Med  $\bar{n}^k \cdot \hat{n}_l = \delta_l^k$  bliver således

$$\hat{n} \cdot \bar{n}^l = -a^l/a \quad (12.6)$$



Figur 12.3

Herefter betragtes tetraederet i figur 12.3, som er lignedannet med tetraederet i figur 12.2, blot er sidelængderne ganget med tallet  $\varepsilon$ . Hermed bliver arealer ganget med  $\varepsilon^2$  og volumenet med  $\varepsilon^3$ . Det antages nu, at Newtons anden lov gælder for tetraederet på formen

$$\varepsilon^2 (a\bar{\sigma}_n + a^1\bar{\sigma}_1 + a^2\bar{\sigma}_2 + a^3\bar{\sigma}_3) + \varepsilon^3 \rho \bar{bc}/6 = \varepsilon^3 \rho \bar{ac}/6 \quad (12.7)$$

hvor  $\bar{a}$  på højresiden af lighedstegnet er accelerationsvektoren.

Ved at dividere med  $\varepsilon^2$  og derefter lade  $\varepsilon$  gå mod nul, finder man

$$\bar{\sigma}_n = -a^l \bar{\sigma}_l / a \quad (12.8)$$

dvs. spændingsvektoren på en vilkårlig flade er bestemt ud fra kendskabet til 3 spændingsvektorer i et punkt.

Ved hjælp af (12.6) kan (12.8) skrives

$$\bar{\sigma}_n = \hat{n} \cdot \bar{n}^l \bar{\sigma}_l = \hat{n} \cdot \underline{\sigma} \quad (12.9)$$

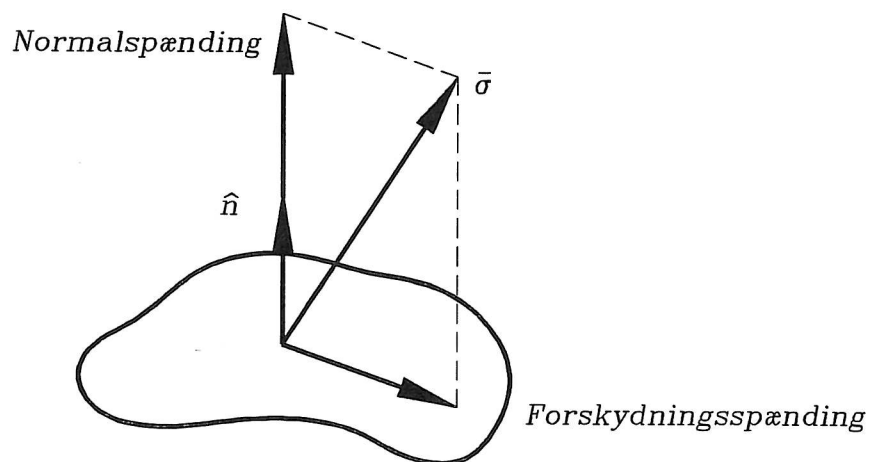
hvor den indførte tensor af anden orden

$$\underline{\sigma} = \bar{n}^l \bar{\sigma}_l = \underline{\sigma}(\bar{r}, \alpha) \quad (12.10)$$

kaldes *spændingstensen*, specielt Cauchys spændingstensor.

Sammenhængen (12.9) mellem spændingsvektoren  $\bar{\sigma}_n$ , normalen  $\hat{n}$  og spændingstensen  $\underline{\sigma}$  gælder for såvel snitflader som begrænsningsflader.

Spændingsvektorens projektion på fladenormalen  $\bar{\sigma} \cdot \hat{n}\hat{n}$  kaldes *normalspændingen* og dens projektion på fladens tangentplan  $\bar{\sigma} - \bar{\sigma} \cdot \hat{n}\hat{n} = \bar{\sigma} \cdot (\underline{I} - \hat{n}\hat{n})$  kaldes *forskydnings-spændingen*, se figur 12.4.



Figur 12.4

Normalspændinger, som peger væk fra den flade, de virker på, kaldes *trækspændinger*, de, der peger ind mod fladen, kaldes *trykspændinger*.

### 13. BEVÆGELSESLIGNINGER

For et kontinuum forudsættes det, at bevægelsesligningerne til enhver værdi af evolutionsparameteren  $\alpha$  kan udtrykkes som kraftvektorligningen

$$\int_v \rho \bar{b} dv + \int_s \bar{\sigma} ds = \int_v \rho \bar{a} dv \quad (13.1)$$

og momentvektorligningen

$$\int_v \bar{r} \times \rho \bar{b} dv + \int_s \bar{r} \times \bar{\sigma} ds = \int_v \bar{r} \times \rho \bar{a} dv \quad (13.2)$$

hvor  $\bar{b}$  er massekraften på en partikel,  $\bar{\sigma}$  fladekraften på et arealelement af legemets begrænsningsflade og  $\bar{a}$  accelerationen.

Benyttes (12.9) samt divergenssætningen, finder man af (13.1)

$$\begin{aligned} \int_v \rho \bar{b} dv + \int_s \bar{\sigma} ds &= \int_v \rho \bar{b} dv + \int_s \hat{n} \cdot \underline{\sigma} ds \\ &= \int_v (\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \bar{b}) dv = \int_v \rho \bar{a} dv \end{aligned} \quad (13.3)$$

som, da udtrykket skal gælde for et vilkårligt delvolumen, fører til bevægelsesligningen

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \bar{b} = \rho \bar{a} \quad (13.4)$$

Tilsvarende finder man af (13.2)

$$\begin{aligned} \int_v \rho \bar{r} \times \bar{b} dv + \int_s \bar{r} \times \bar{\sigma} ds &= \int_v \rho \bar{r} \times \bar{b} dv - \int_s \hat{n} \cdot \underline{\sigma} \times \bar{r} ds \\ &= \int_v \left( \rho \bar{r} \times \bar{b} - \operatorname{div} (\underline{\sigma} \times \bar{r}) \right) dv \\ &= \int_v \left( \rho \bar{r} \times \bar{b} - (\operatorname{div} \underline{\sigma}) \times \bar{r} - \bar{t}^k \cdot \underline{\sigma} \times \bar{t}_k \right) dv = \int_v \rho \bar{r} \times \bar{a} dv \end{aligned} \quad (13.5)$$

som kan skrives

$$\int_v \bar{r} \times (\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \bar{b} - \rho \bar{a}) dv - \int_v \bar{t}^k \cdot \underline{\sigma} \times \bar{t}_k dv = \bar{0} \quad (13.6)$$

Benyttes (13.4) og (4.53):  $\underline{\sigma}^T = \bar{t}^k \cdot \underline{\sigma} \bar{t}_k$  har man

$$\int_v \underline{E} : \bar{t}^k \cdot \underline{\sigma} \bar{t}_k dv = \int_v \underline{E} : \underline{\sigma}^T dv = \bar{0} \quad (13.7)$$

som sammen med (4.91) viser, at spændingstensoren er selvtransponeret

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad (13.8)$$

Når spændingstensoren er selvtransponeret, kan den på normalform skrives  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^k \hat{i}_k \hat{i}^k$ , hvor  $\hat{i}_k \cdot \hat{i}^l = \delta_k^l$ . Snitfladerne med  $\hat{i}^k$  som normaler kaldes hovedsnittene, og da spændingsvektorerne på disse snit har samme retning som normalerne, optræder der ikke forskydningspændinger på hovedsnittene.

Sammenfattende bliver bevægelsesligningerne

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \bar{\mathbf{b}} &= \rho \bar{\mathbf{a}} \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\sigma}}^T \end{aligned} \quad (13.9)$$

gældende for et kontinuum uden momentspændinger.

### 13.1 Piola-Kirchoff spændinger

Bevægelsesligningerne (13.9) er opstillet i den aktuelle konfiguration svarende til parameterværdien  $\alpha$ , den deformerede tilstand. De størrelser, der indgår i ligningerne, er derfor funktioner af  $\bar{\mathbf{r}}$  og  $\alpha$ , dvs.  $\underline{\underline{\sigma}}(\bar{\mathbf{r}}, \alpha)$ ,  $\bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{r}}, \alpha)$  og  $\bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{r}}, \alpha)$ . Det kan ofte være bekvemt at arbejde med spændinger, som er funktioner af stedvektoren  $\bar{\mathbf{R}}$  svarende til referencekonfigurationen, den udeformerede tilstand. Kraften  $d\bar{\mathbf{F}}$  på fladeelementet  $d\bar{\mathbf{a}} = d\bar{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{n}}$ , se figur 12.1, udtrykkes derfor som  $\bar{\Sigma} dA$ , hvor  $\bar{\Sigma}$  er en ny spændingsvektor, og  $dA$  er arealet af det fladelement  $d\bar{\mathbf{A}} = dA \hat{\mathbf{N}}$ , som under deformationen føres over i  $d\bar{\mathbf{a}}$ . Man har således

$$d\bar{\mathbf{F}} = \bar{\sigma} da = \bar{\Sigma} dA \quad (13.10)$$

Den nye spændingsvektor  $\bar{\Sigma}$  kaldes Piola-Kirchoff spændingsvektoren, og ligesom Cauchy spændingsvektoren udtrykkes ved Cauchys spændingstensor som  $\bar{\sigma} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ , udtrykkes også Piola-Kirchoff spændingsvektoren ved Piola-Kirchoff spændingstensoren som  $\bar{\Sigma} = \hat{\mathbf{N}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ . Udtrykket (13.10) kan nu skrives

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} da = \hat{\mathbf{N}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} dA \quad (13.11)$$

eller

$$d\bar{\mathbf{a}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = d\bar{\mathbf{A}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (13.12)$$

Benyttes Nansons formel (7.38) fås

$$Jd\bar{A} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = d\bar{A} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \quad (13.13)$$

og hermed sammenhængen mellem de to spændingstensorer

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} &= J\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \\ \underline{\underline{\sigma}} &= J^{-1}\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \end{aligned} \quad (13.14)$$

Indsættes (13.14b) i bevægelsesligningen (13.9a), og benyttes (7.126b) samt  $\rho_0 = \rho J$ , fås

$$\text{Div } \underline{\underline{\Sigma}} + \rho_0 \bar{b} = \rho_0 \bar{a} \quad (13.15)$$

som er en bevægelsesligning henført til referencetilstanden.

Af (13.14a) og (13.9b) fremgår

$$\underline{\underline{\Sigma}}^T = J\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (13.16)$$

som viser, at den *første Piola-Kirchhoff spændingstensor*  $\underline{\underline{\Sigma}}$  ikke er selvtransponeret. En selvtransponeret tensor får man ved at indføre den *anden Piola-Kirchhoff spændingstensor*  $\underline{\underline{S}}$  ved

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^T = J\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (13.17)$$

Til gengæld bliver bevægelsesligningen, som fås ved at indsætte  $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$  fra (13.17) i (13.15)

$$\text{Div} (\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T) + \rho_0 \bar{b} = \rho_0 \bar{a} \quad (13.18)$$

ikke særlig bekvem.

Sammenfattende er sammenhængen mellem de tre spændingstensorer

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= J^{-1}\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} = J^{-1}\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \\ \underline{\underline{\Sigma}} &= \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = J\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \\ \underline{\underline{S}} &= J\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \end{aligned} \quad (13.19)$$

Når tøjninger og rotationer er små, se afsnit 7.3.2, er  $\underline{F} \cong \underline{I}$  og  $J \cong 1$ , og de tre spændingstensorer bliver da praktisk taget identiske, ligesom bevægelsesligningerne (13.9), (13.15) og (13.18) bliver identiske.

### 13.2 Statik og kinetik

I bevægelsesligningen (13.3)

$$\int_v \rho \bar{b} dv + \int_s \hat{n} \cdot \underline{\sigma} ds = \int_v \rho \bar{a} dv \quad (13.20)$$

er første led på venstresiden massekraften, andet led er fladekraften og leddet på højresiden er inertikraften. Det er kun, når et legemes partikler accelereres, at der optræder inertikræfter, og i de problemer, hvor man er interesseret i at bestemme ligevægtstilstande, uden i øvrigt at være interesseret i, hvorledes man kommer fra en ligevægtstilstand til en anden, optræder inertikræfter således ikke. Bevægelsesligningerne (13.9) ændres for sådanne *statiske* problemer til *ligevægtsligningerne*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \bar{b} &= \bar{0} \\ \underline{\sigma} &= \underline{\sigma}^T \end{aligned} \quad (13.21)$$

Når man er interesseret i en beskrivelse af hele deformationsprocessen, må man imidlertid medtage inertikræfterne. Problemerne kaldes da *kinetiske* og bevægelsesligningerne er (13.9)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \bar{b} &= \rho \bar{a} \\ \underline{\sigma} &= \underline{\sigma}^T \end{aligned} \quad (13.22)$$

Kinetiske problemer omtales ofte som dynamiske problemer.

## 14. SPECIELLE SPÆNDINGSTILSTANDE

Ligesom der forekommer specielle bevægelser, er der også spændingstilstande, som er enten simple og forholdsvis ofte forekommende, eller som er underlagt forskellige dynamiske bindinger.

### 14.1 Simple spændingstilstande

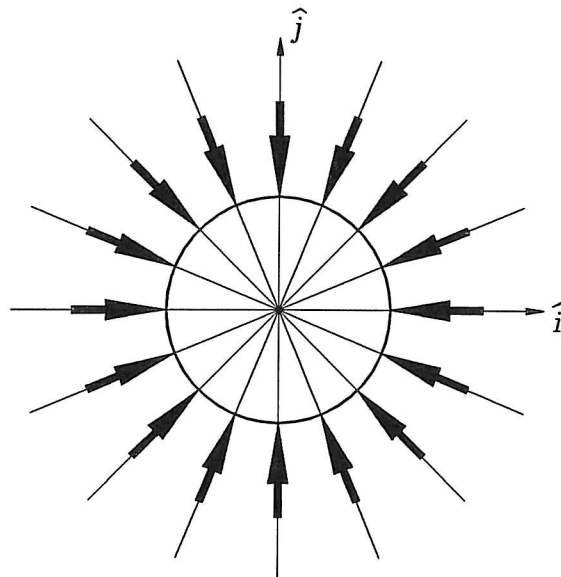
Som eksempler på simple spændingstilstande skal anføres nogle homogene tilstande. Når spændingerne er homogene, er  $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = \bar{0}$ , og er der tale om en ligevægtstilstand, må legemet derfor ikke være påvirket af massekræfter.

#### a) Alsidigt træk eller tryk

Spændingstilstanden

$$\underline{\underline{\sigma}} = \pm p \underline{\underline{I}} \quad (14.1)$$

hvor  $p$  er en positiv konstant, kaldes alsidigt træk, når plustegnet gælder, og alsidigt tryk når minustegnet gælder. Nogle spændingsvektorer på forskellige planer er vist i figur 14.1. Normalerne til planerne er  $\hat{n} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$ , og der er vist trykspændinger.



Figur 14.1

Spændingsvarianterne er

$$I_{\sigma} = \pm 3p, \quad II_{\sigma} = 3p^2, \quad III_{\sigma} = \pm p^3 \quad (14.2)$$

og hovedspændingerne (egenværdierne)

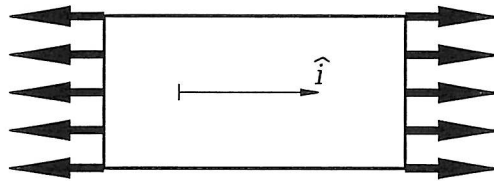
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \pm p \quad (14.3)$$

### b) Enakset træk

Er spændingerne givet ved

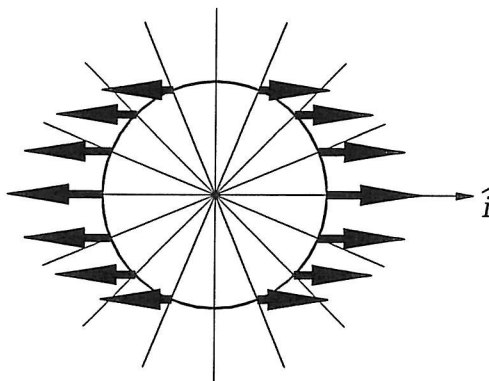
$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \hat{i} \hat{i} \quad (14.4)$$

hvor  $\sigma$  er en positiv konstant, kaldes tilstanden enakset træk. Spændingsvektorerne på siderne af et retvinklet parallellepipedum er vist i figur 14.2.



Figur 14.2

Man bemærker, at spændingsvektoren er nulvektoren på flader med normal vinkelret på  $\hat{i}$ . Spændingsvektorens variation med normalen er vist i figur 14.3.



Figur 14.3

Spændingsinvarianterne er

$$I_\sigma = \sigma, \quad II_\sigma = III_\sigma = 0 \quad (14.5)$$

og hovedspændingerne

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (14.6)$$



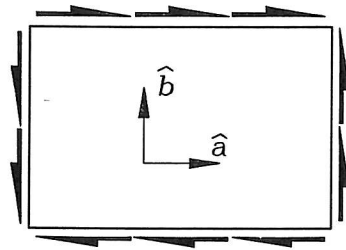
Med negativ  $\sigma$  i (14.4) kaldes tilstanden enakset tryk.

### c) Forskydning

For spændingerne

$$\underline{\sigma} = \tau(\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}) \quad (14.7)$$

hvor  $\tau$  er en positiv konstant er spændingsvektorerne på siderne af et retvinklet parallelepipedum vist i figur 14.4.



Figur 14.4

Spændingstilstanden kaldes forskydning. Spændingsinvarianterne er

$$I_\sigma = 0, \quad II_\sigma = -\tau^2, \quad III_\sigma = 0 \quad (14.8)$$

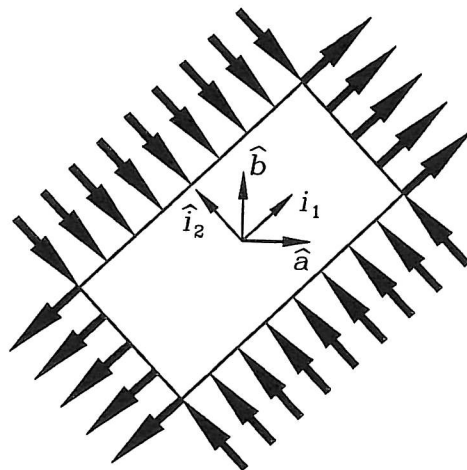
og hovedspændingerne

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma_3 = 0 \quad (14.9)$$

med hovedretningerne (egenvektorerne)

$$\hat{i}_1 = (\hat{a} + \hat{b})\sqrt{2}/2, \quad \hat{i}_2 = (\hat{b} - \hat{a})\sqrt{2}/2, \quad \hat{i}_3 = \hat{a} \times \hat{b} \quad (14.10)$$

Spændingsvektorerne på sidefladerne af et retvinklet parallelepipedum med  $\hat{i}_k$  som

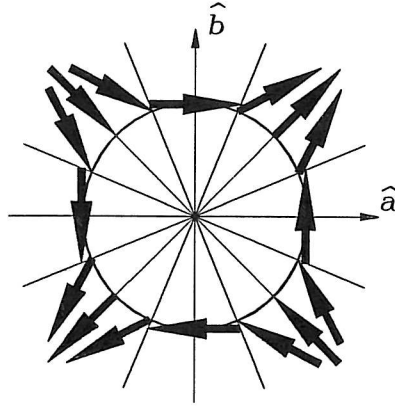


Figur 14.5

normaler er vist i figur 14.5. På normalform bliver spændingstensoren

$$\underline{\sigma} = \tau (\hat{i}_1 \hat{i}_1 - \hat{i}_2 \hat{i}_2) \quad (14.11)$$

Spændingsvektorens variation med normalen iøvrigt er vist i figur 14.5.



Figur 14.6

## 14.2 Dynamiske bindinger

Som et eksempel på en dynamisk binding, og som et eksempel på en binding, der udtrykkes ved en ulighed og ikke en ligning, kan nævnes det tilfælde, hvor der ikke optræder trækspændinger, dvs. alle normalspændinger skal i ethvert punkt være trykspændinger. Betingelsen kan udtrykkes som

$$\hat{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \hat{n} \leq 0 \quad (14.12)$$

og skrives spændingstensoren på normalform

$$\underline{\sigma} = \sigma_1 \hat{i}_1 \hat{i}_1 + \sigma_2 \hat{i}_2 \hat{i}_2 + \sigma_3 \hat{i}_3 \hat{i}_3 \quad (14.13)$$

bliver betingelsen, at alle hovedspændinger skal være mindre end eller lig med nul

$$\sigma_1 \leq 0, \sigma_2 \leq 0, \sigma_3 \leq 0 \quad (14.14)$$

da  $\sigma_3 \leq \hat{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \hat{n} \leq \sigma_1$ , når  $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ , jvf. bemærkningerne vedrørende deformationstensoren  $\underline{C}$  i afsnit 7.1.1. Udtrykt ved hovedinvarianterne fås

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \leq 0 \\ II_\sigma &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \geq 0 \\ III_\sigma &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \leq 0 \end{aligned} \quad (14.15)$$

## 15. SPÆNDINGSFUNKTIONER

Betragtningerne vedrørende spændingsfunktioner skal her indskrænkes til kun at omfatte statiske problemer, dvs. der søges generelle løsninger til ligevægtsligningerne

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \bar{\underline{\underline{b}}} = \bar{\underline{\underline{0}}}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad (15.1)$$

Da det ofte er forholdsvis let at bestemme en partikulær løsning til (15.1), er det egentlige problem at finde løsninger til

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \bar{\underline{\underline{0}}}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad (15.2)$$

med tilhørende randbetingelser.

I henhold til (5.112) er

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{0}} \quad (15.3)$$

for alle tensorfelter  $\underline{\underline{L}}(\bar{\underline{\underline{r}}})$  (undtagen skalarfelter), så ved at sætte  $\underline{\underline{\sigma}} = \operatorname{rot} \underline{\underline{L}}$ , hvor  $\underline{\underline{L}}$  er en tensor af anden orden, er den første ligning i (15.2) identisk tilfredsstillet. Da  $\operatorname{rot} \underline{\underline{L}}$  ikke nødvendigvis er selvtransponeret, er den anden ligning i (15.2) ikke altid opfyldt. Dette kan imidlertid opnås, når man bemærker, at

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{\underline{U}})^T = (\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{\underline{U}})^T)^T \quad \text{når } \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^T \quad (15.4)$$

idet størrelserne på begge sider af lighedstegnet er lig med  $\bar{t}'_{ml} \cdot \bar{t}^k \bar{t}^l \times \underline{\underline{U}}'_k \times \bar{t}^m - \bar{t}^l \times \underline{\underline{U}}''_{kl} \times \bar{t}^k$ , og ved at man sætter  $\underline{\underline{L}} = (\operatorname{rot} \underline{\underline{U}})^T$ , dvs.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{\underline{U}})^T, \quad \bar{\underline{\underline{U}}} = \bar{\underline{\underline{U}}}^T \quad (15.5)$$

Hermed er begge ligevægtsligninger i (15.2) identisk tilfredsstillet. Spændingstensionstensen af anden orden  $\underline{\underline{U}}$  skal, foruden at være selvtransponeret, bestemmes, så randbetingelserne tilfredsstilles. Spændingstensionstensen kan ikke bestemmes entydigt, da løsninger til

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{\underline{U}})^T = \underline{\underline{0}} \quad (15.6)$$

ikke kun er nultensoren.

Som et eksempel på en spændingstensionstensor skal anføres

$$\underline{\underline{U}} = -\tau \bar{\underline{\underline{r}}} \cdot \hat{\underline{\underline{a}}} \hat{\underline{\underline{b}}} \cdot \bar{\underline{\underline{r}}} \hat{\underline{\underline{k}}} \hat{\underline{\underline{k}}} \quad (15.7)$$

hvor  $\tau$  er en konstant og  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{k}$  et system af ortogonale enhedsvektorer.

Man finder

$$\text{grad } \underline{U} = -\tau \bar{r} \cdot (\hat{b} \hat{a} + \hat{a} \hat{b}) \hat{k} \hat{k} \quad (15.8)$$

og hermed

$$\text{rot } \underline{U} = \tau \bar{r} \cdot (\hat{b} \hat{b} - \hat{a} \hat{a}) \hat{k} \quad (15.9)$$

Herefter

$$\text{grad}(\text{rot } \underline{U})^T = \tau (\hat{b} \hat{k} \hat{b} - \hat{a} \hat{k} \hat{a}) \quad (15.10)$$

og endelig

$$\text{rot}(\text{rot } \underline{U})^T = \tau (\hat{a} \hat{b} + \hat{b} \hat{a}) \quad (15.11)$$

som viser, at  $\underline{U}$  i (15.7) er spændingsfunktionstensoren for spændingstilstanden forskydning i afsnit 14.1, eksempel c.